

Distribuzione normale e Integrale di Gauss

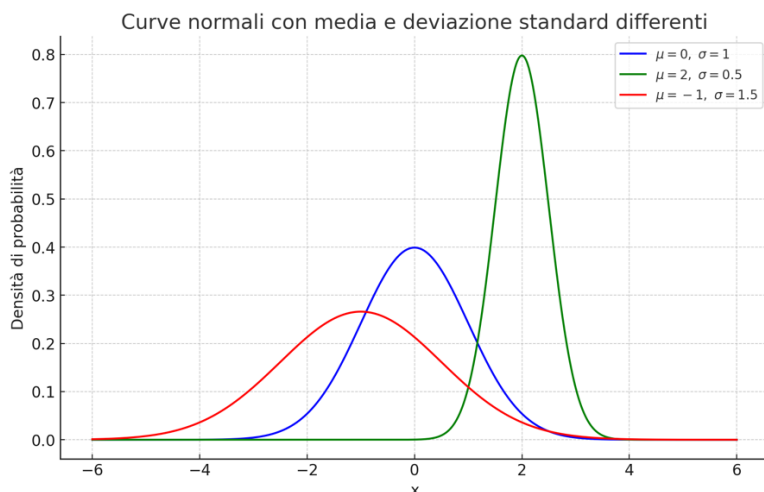
Nel 1809, nella sua opera *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, il grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) introdusse la cosiddetta Distribuzione Normale, detta anche Norma Naturale, intesa come modello matematico atto a descrivere come si distribuiscono le variazioni dei risultati che si ottengono durante una determinata serie di misure. In particolare si è visto sperimentalmente che tale distribuzione assume una tipica forma “a campana” detta anche “Campana di Gauss”: nello specifico, quando tantissimi piccoli effetti casuali indipendenti si sommano la natura finisce infatti quasi sempre per “disegnare” una campana di Gauss.

Vi sono svariati fenomeni in natura ad essere condizionati da questo andamento: errori di misura, caratteristiche biologiche, fluttuazioni casuali in finanza o in fisica... tutti fenomeni che si distribuiscono secondo l'andamento a campana di questa distribuzione normale. Se introduciamo adesso allo scopo due precisi parametri denominati rispettivamente Media (indicata solitamente con il simbolo μ) e Deviazione Standard (indicata con il simbolo σ) la curva $f(x)$ che descrive l'andamento della Distribuzione Normale è data dalla seguente relazione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

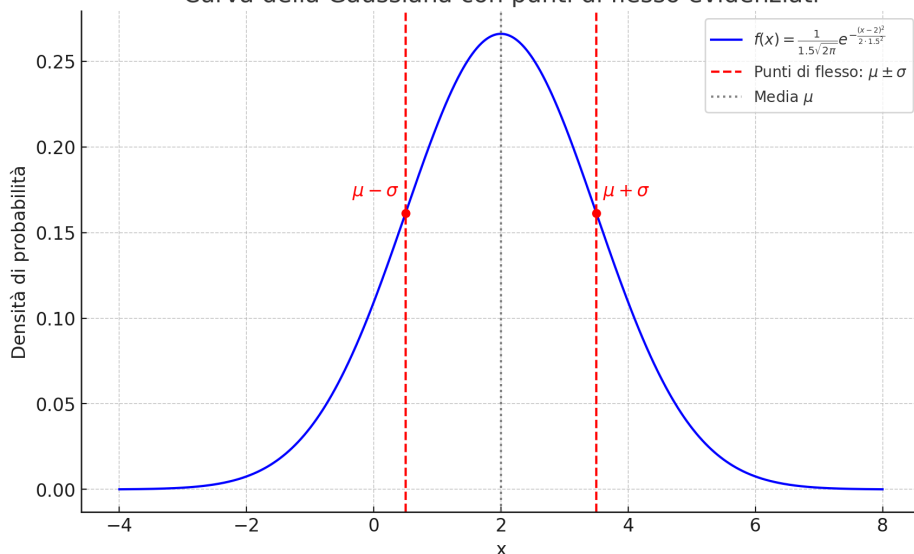
Questa relazione mostra appunto la stretta dipendenza esistente dai due parametri σ e μ appena introdotti. In realtà, però, la vera natura di questa funzione è ancora più profonda in quanto ci dice “quanto è probabile una zona attorno ad un certo valore”, ovvero quanta probabilità c'è per unità di variabile riferita all'asse delle ascisse (prima indicato con x). Per tale motivo tale funzione corrisponde a quella che chiamiamo solitamente con il termine di Densità di Probabilità o Curva Gaussiana (si noti che, nello specifico, la forma a campana della curva nasce proprio dalla presenza del termine e^{-x^2}).

Al variare dei valori della Media e della Deviazione Standard varia la forma a campana della gaussiana; la Media, per esempio, la trasla lungo l'asse delle ascisse, mentre la Deviazione Standard indica quanto si allarga o si stringe la forma della campana stessa, come illustrato di seguito:



Si noti anche che i due punti relativi alla Deviazione Standard (a destra e a sinistra della Media) corrispondono ai punti di flesso della curva $f(x)$ stessa, cioè a quei punti in cui la curva cambia di concavità passando da convessa a concava e viceversa (essendo punti di flesso, i punti della Deviazione Standard sono anche i punti in cui la derivata seconda di $f(x)$ cambia di segno). In particolare, quindi, nella regione compresa tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ la funzione ha curvatura negativa (cioè è concava verso il basso) mentre fuori da quell'intervallo ha curvatura positiva (cioè è convessa).

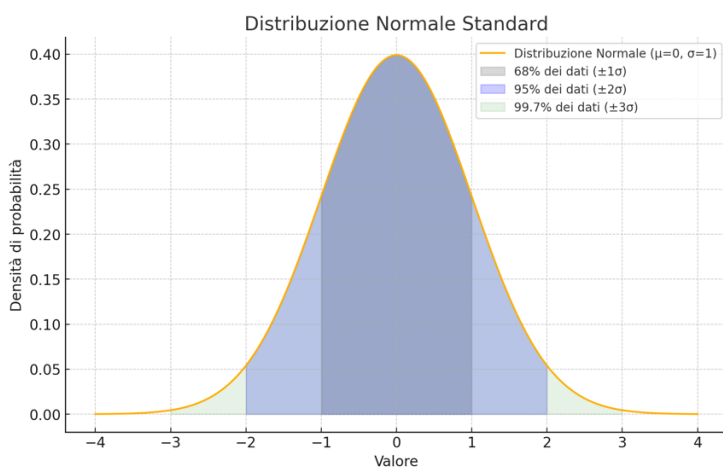
Curva della Gaussiana con punti di flesso evidenziati



Si noti che la regione compresa tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ contiene circa il 68% dei dati della funzione stessa, e questo è vero per qualsiasi valore di μ e σ . Ora va da sé che a prescindere dai valori di μ e σ impiegati, se tale funzione corrisponde come detto ad una Densità di Probabilità (cioè, “quanta” Probabilità c’è per unità di variabile x) allora di conseguenza l’area sottesa dalla curva in figura corrisponde di fatto proprio alla Probabilità. E siccome la curva è estesa a tutto lo spazio, trattandosi di probabilità l’area complessiva deve essere pari ad 1 (cioè corrispondente al 100%, ovvero alla “certezza”): il che corrisponde a dire che deve essere uguale ad 1 l’integrale della gaussiana $f(x)$ esteso a tutto lo spazio. Ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = 1$$

Di seguito mostriamo adesso un andamento semplificato del grafico “a campana”, dove si è supposto per semplicità per la Media il valore $\mu = 0$ e per la Deviazione Standard il valore $\sigma = 1$:



Si noti che in questa figura sono state evidenziate:

- in scuro l’area che contiene circa il **68%** dei dati (tra -1 e $+1$): questo corrisponde a dire che abbiamo il 68% di possibilità che il risultato di una misura cada all’interno di questo intervallo

- in grigio chiaro quella con circa il **95%** dei dati (tra -2 e $+2$)
- in giallino quella con circa il **99.7%** dei dati (tra -3 e $+3$).

In tal caso la forma della funzione gaussiana con Media $\mu = 0$ e Deviazione Standard $\sigma = 1$ può allora essere semplicemente riscritta così come segue:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si noti quindi adesso come tale curva dipenda strettamente solo dal termine e^{-x^2} . In tali condizioni per analizzare la Probabilità siamo di conseguenza interessati a determinare l'area sottesa dalla curva Densità di Probabilità, il che si riduce quindi allo studio del seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx$$

Tale integrale è detto Integrale di Gauss.

Calcolare l'integrale di Gauss non è propriamente semplice. Si può allo scopo procedere impiegando il metodo sviluppato per l'occasione proprio da Gauss, metodo che utilizza una procedura particolare che prevede di iniziare a calcolare I^2 invece di I . In tal caso, se vogliamo calcolare I^2 il procedimento di Gauss necessita di far riferimento a due variabili indipendenti, x e y cosa che ci consente di scrivere:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot dy \right)$$

Ora, moltiplicando adesso tra loro questi due integrali ciò che si ottiene è il seguente integrale doppio sul piano (x, y) :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy$$

A questo punto su tale piano si può eseguire una classica trasformazione di coordinate da cartesiane a polari. Una tale trasformazione implica il passaggio dalle coordinate (x, y) alle coordinate di un vettore posizione di lunghezza r dall'origine degli assi del sistema di riferimento, e formante un angolo ϑ con l'asse delle ascisse. Ciò permette allora di esprimere tale trasformazione di coordinate grazie alle due semplici relazioni trigonometriche illustrate di seguito:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\vartheta) \\ y = r \cdot \sin(\vartheta) \end{cases}$$

Ora, in coordinate polari il termine $x^2 + y^2$ ad esponente dentro l'integrale diventa semplicemente:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Invece, per vedere come si trasformano i due differenziali dx e dy è un po' più complicato in quanto è necessario operare adesso con delle derivate parziali. Più precisamente le due variabili x e y si devono derivare rispetto a r e ϑ , come di seguito:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\vartheta) \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -r \cdot \sin(\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\vartheta) \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r \cdot \cos(\vartheta) \end{cases}$$

Questi quattro risultati possono ora essere raccolti insieme rappresentandoli in forma matriciale. La matrice che così si genera è molto importante in matematica e fisica e prende il nome di Operatore Jacobiano, usualmente indicato con la lettera J . Vedremo nel successivo capitolo dedicato agli Operatori la descrizione

dettagliata dello Jacobiano mentre per il momento possiamo limitarci ad evidenziare come, nel caso che stiamo esaminando, la Matrice Jacobiana J relativa al cambio di coordinate da cartesiane a polari assuma la seguente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -r \cdot \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r \cdot \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è a sua volta dato da:

$$\begin{aligned} \det(J) &= \cos(\vartheta) \cdot r \cdot \cos(\vartheta) - [-r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta)] = \\ &= r \cdot \cos^2(\vartheta) + r \cdot \sin^2(\vartheta) = \\ &= r \cdot (\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)) = \\ &= r \cdot 1 = \\ &= r \end{aligned}$$

Nello specifico, il compito di questo determinante è fornire una indicazione di quanto “si deforma” un piccolo elemento di area quando si cambia sistema di coordinate passando da quelle cartesiane a quelle polari. Ora, mentre in coordinate cartesiane l’area di un rettangolino infinitesimo la si può benissimo indicare come il prodotto dei due elementi infinitesimi dx e dy che fungerebbero da base ed altezza, in coordinate polari invece ciò non è più possibile perché l’elemento infinitesimo è come se subisse una infinitesima deformazione. Tale minuscola deformazione fa sì che la nuova area così “incurvata” sia pari al prodotto dell’elemento dr (che fa ancora le veci di dx ovvero da “base” di questo rettangolino incurvato) per l’elemento $r \cdot d\vartheta$ (che fa invece le veci di dy e quindi corrisponderebbe all’altezza). Ma dato che r è a sua volta il risultato del determinante dello Jacobiano $\det(J)$ prima calcolato allora, in definitiva, cambiando sistema di riferimento avremo nel caso che stiamo esaminando che:

$$dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\vartheta$$

Ricordiamo quindi qui che, per trasformazioni di coordinate più complesse, in linea generale la relazione di trasformazione sarà espressa portando direttamente in conto lo Jacobiano della trasformazione, così come segue:

$$dx \cdot dy = \det(J) \cdot dr \cdot d\vartheta$$

In buona sostanza lo Jacobiano fornisce quindi l’esatto fattore di scala locale esistente tra un elemento di area (o anche di volume, nel caso di analisi più complesse) nel passare da un sistema di riferimento ad un altro.

Come detto, nel capitolo dedicato agli operatori si approfondirà di più il ruolo dello Jacobiano; per ora è sufficiente prendere nota che nel cambio di variabile nell’integrale di Gauss l’elemento $dx \cdot dy$ si trasforma e diventa quindi $r \cdot dr \cdot d\vartheta$. In tal modo il precedente integrale in coordinate cartesiane:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy$$

diventerà, in coordinate polari:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr \cdot d\vartheta$$

(per quanto riguarda i nuovi estremi degli integrali si noti che essi trovano la loro giustificazione nel fatto che mentre le coordinate x e y possono variare da $-\infty$ a $+\infty$, in coordinate polari la distanza r dall’origine del sistema di riferimento può variare solo tra 0 e $+\infty$, mentre l’angolo ϑ può andare solo da 0 a 2π)

Per calcolare adesso questo nuovo integrale doppio separiamo le nuove variabili, riscrivendolo quindi così come segue tramite il prodotto qui evidenziato di seguito:

$$I^2 = \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr \right)$$

Il primo integrale è ovviamente facile da calcolare e da come risultato:

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta = [\vartheta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Per il secondo integrale occorre invece effettuare un opportuno cambio di variabile ponendo allo scopo:

$$u = r^2$$

da cui, passando adesso ai differenziali:

$$du = d(r^2) = 2 \cdot r \cdot dr$$

e poi invertendo:

$$r \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot du$$

Quindi:

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot du$$

Anche quest'ultimo integrale è adesso facilmente risolvibile, perché non è altro che l'integrale di un esponenziale. Si ha perciò:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot du = \frac{1}{2} \cdot [-e^{-u}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \cdot [0 - (-1)] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Quindi, anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}$$

In definitiva, perciò, la soluzione del nostro integrale doppio sarà:

$$I^2 = \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Ma se $I^2 = \pi$ allora ne consegue semplicemente che:

$$I = \sqrt{\pi}$$

La soluzione dell'integrale di Gauss è quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$$

Tale soluzione si riconduce quindi alla Distribuzione Normale caratterizzata dalla curva a campana analizzata in precedenza, e costituisce un concetto fondamentale in tutte quelle discipline che si basano sulla probabilità e sulla statistica. Ricordiamo allo scopo nuovamente che la curva a campana $f(x)$, nel caso "semplificato" con Media fissata pari a 0 e Deviazione Standard uguale a 1, è data dalla relazione di Densità di Probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Come si può facilmente vedere tale relazione porta dentro di sé il termine quadrato sopra l'esponenziale. Per cui, passando all'integrazione, essa assume una forma molto simile all'integrale di Gauss vista la presenza al suo interno del termine dell'esponenziale elevato al quadrato; ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

Tuttavia, però, trattandosi di una Densità di Probabilità l'area sottesa da questa curva, ovvero l'integrale, deve essere pari ad 1 dato che corrisponde alla Probabilità estesa su tutto lo spazio. Ma dato che l'integrale di questa $f(x)$ ha appunto la forma di un integrale di Gauss, ciò costituisce adesso un problema perché, come abbiamo appena visto, un integrale "standard" di Gauss fornisce come risultato $\sqrt{\pi}$ e non 1. Per far quadrare i conti è necessario allora operare con un nuovo cambio di variabile ponendo:

$$u = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2} \cdot u \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cdot du$$

Portiamo allora in conto questo cambio di variabile nel precedente integrale. Scriveremo perciò:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2} \cdot du$$

Raccogliamo ora le costanti:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du$$

Ma questo risultato è proprio l'integrale di Gauss, il cui valore sappiamo essere pari a $\sqrt{\pi}$, per cui

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

ed ecco che in tal modo la Densità di Probabilità è stata perfettamente normalizzata, arrivando quindi al risultato che volevamo ricavare.

Di fatto, in fisica e ingegneria, il termine e^{-x^2} fa la sua apparizione ogni qualvolta che si ha a che fare con fenomeni gaussiani, ovvero onde luminose, rumore termico, diffusione di particelle, ecc.: tutti fenomeni che seguono una distribuzione a campana! Ad esempio Nei gas perfetti, ad esempio, la velocità delle molecole segue una distribuzione di Maxwell-Boltzmann, che ha al suo interno il termine e^{-x^2} . La stessa cosa si verifica quando si vuole sapere quanti atomi si muovono più veloci di una certa velocità oppure nello studio del rumore termico nei dispositivi elettronici come amplificatori, o ricevitori radio: anche in tutti questi casi, infatti, ci si ritrova sempre a dover integrare funzioni del tipo e^{-x^2} .

Un caso particolare è infine la cosiddetta Funzione degli Errori, definita da:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

Utilissima in statistica, calcolo delle probabilità, modelli di diffusione del calore, ecc... tale funzione è costituita in pratica da una particolare versione dell'Integrale di Gauss esteso però su di un intervallo di ampiezza finita: e proprio il valore dell'estensione di tale intervallo costituisce di fatto la variabile da cui tale particolare funzione dipende. Lo stesso Gauss, per primo, impiegò tale funzione per descrivere come si distribuiscono gli errori durante una serie di misure.

Nello specifico tale distribuzione $\text{erf}(x)$ prende il nome di Accumulo degli Errori di Misura, e fornisce la probabilità che una variabile gaussiana standard, ovvero con Media pari a 0 e Deviazione Standard pari ad 1, assuma un valore compreso tra 0 e $x \cdot \sqrt{2}$.

La $\text{erf}(x)$ è una funzione crescente al variare della variabile x andando asintoticamente dal valore -1 per $x \rightarrow -\infty$ al valore $+1$ per $x \rightarrow +\infty$, come mostrato nella figura seguente in cui sono evidenziati quelli che sono i seguenti valori noti principali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(1) \approx 0.843 \\ \text{erf}(\sqrt{2}) \approx 0.955 \end{array} \right.$$

Il grafico seguente mostra l'andamento della $\text{erf}(x)$:

