Funzione Gamma

Definizione

La funzione Gamma, denotata genericamente con il simbolo Γ, è una funzione molto importante in matematica con numerose applicazioni in analisi, in teoria delle probabilità, nella fisica e in tante altre aree: e tra le altre cose, come vedremo tra poco, tale funzione può anche essere riguardata come una importante estensione del concetto di fattoriale arrivando ad estenderlo ai numeri frazionari e addirittura ai numeri complessi. Ma andiamo con ordine.

Data una generica variabile x (reale o complessa) la funzione Gamma è definita dal seguente, fondamentale, integrale esteso su tutto l'intervallo positivo:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Una volta, quindi, definita la funzione secondo questa forma possiamo passare ad analizzare tutte le sue possibili proprietà.

Funzione Gamma per interi positivi

Iniziamo allora con l'impiegare, al posto di x, la successione di numeri interi naturali n, con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ecc$ .... In tal caso l'integrale precedente si può allora semplicemente riscrivere nei termini della variabile discreta n come:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

La risoluzione di questo integrale si può ridurre ad una procedura "relativamente" semplice, la cui descrizione verrà adesso illustrata caso per caso per i primi 4 valori interi di n. Andremo a calcolare cioè la sequenza di valori $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \mathrm{ecc}$ ...

- Nel caso più semplice, in cui possiamo supporre $\boldsymbol{n = 1}$, avremo quindi per la Funzione Gamma:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t^0 \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-t} \cdot dt = -[e^{-t}]_0^\infty = -(0-1) = 1$$

Quindi in definitiva:

$$\boldsymbol{\Gamma(1) = 1}$$

- Per $\boldsymbol{n = 2}$ avremo invece:

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t^{2-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t^1 \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Ora, per risolvere quest'ultimo integrale è necessario procedere per parti. Ricordiamo quindi a tal proposito che per un integrale generico nella forma

$$\int u \cdot dv$$

vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Nel nostro caso specifico ciò corrisponde allora a porre:

$$\begin{cases} u = t \to du = dt \\ dv = e^{-t} \cdot dt \to v = -e^{-t} \end{cases}$$

In base a ciò, otterremo, quindi per il nostro precedente integrale il seguente sviluppo per parti:

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-t} \cdot dt = [-t \cdot e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} \cdot dt = [-t \cdot e^{-t} - e^{-t}]_0^\infty$$

Vediamo quindi i calcoli ai due estremi di integrazione.

Per $t \to \infty$ avremo quindi:

$$\lim_{t\to\infty} (-t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \to 0$$

mentre per $t = 0$ si ricaverà semplicemente:

$$-t \cdot e^{-t}|_{t=0} - e^{-t}|_{t=0} = -0 \cdot 1 - 1 = -1$$

Quindi in definitiva anche per $\Gamma(2)$ avremo:

$$\boldsymbol{\Gamma(2)} = 0 - (-1) = \mathbf{1}$$

- Vediamo adesso il caso per $\boldsymbol{n = 3}$:

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^{3-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Anche questo integrale si risolve per parti. Ricordando quindi ancora una volta che:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

dove però stavolta:

$$\begin{cases} u = t^2 \to du = 2 \cdot t \cdot dt \\ dv = e^{-t} \cdot dt \to v = -e^{-t} \end{cases}$$

avremo di conseguenza per il nostro nuovo integrale:

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt = [-t^2 \cdot e^{-t}]_0^\infty - \left(-2 \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-t} \cdot dt\right)$$

Ma l'integrale in parentesi è stato risolto prima per il caso $n = 2$; e, come abbiamo appena visto, vale:

$$-t \cdot e^{-t} - e^{-t}$$

per cui in definitiva:

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt =$$
$$= [-t^2 \cdot e^{-t}]_0^\infty + [2 \cdot (-t \cdot e^{-t} - e^{-t})]_0^\infty =$$
$$= [-t^2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot (-t \cdot e^{-t} - e^{-t})]_0^\infty =$$
$$= [-t^2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t}]_0^\infty$$

Vediamo allora i calcoli relativi ai due estremi di integrazione.

Per $t \to \infty$ avremo quindi ancora una volta:

$$\lim_{t\to\infty} (-t^2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} (-t^2 \cdot e^{-t}) - 2 \cdot \lim_{t\to\infty} (t \cdot e^{-t}) - 2 \cdot \lim_{t\to\infty} (e^{-t})$$

Si noti ora che tutti e tre questi limiti tendono a zero per $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} (-t^2 \cdot e^{-t}) \to 0 \qquad \lim_{t\to\infty} (t \cdot e^{-t}) \to 0 \qquad \lim_{t\to\infty} (e^{-t}) \to 0$$

D'altro canto, invece, per $t = 0$ si ricaverà:

$$-t^2 \cdot e^{-t}|_{t=0} - 2 \cdot t \cdot e^{-t}|_{t=0} - 2 \cdot e^{-t} = |_{t=0}$$
$$= -0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -0 - 0 - 2 = -2$$

Quindi in definitiva sarà:

$$\boldsymbol{\Gamma(3)} = 0 - (-2) = \mathbf{2}$$

- Continuiamo, e vediamo quindi adesso il caso per $\boldsymbol{n = 4}$

  Avremo:

$$\Gamma(4) = \int_0^\infty t^{4-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Ricordando sempre che:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

procediamo ancora con l'integrazione per parti, dove però stavolta avremo per u e v:

$$\begin{cases} u = t^3 \to du = 3 \cdot t^2 \cdot dt \\ dv = e^{-t} \cdot dt \to v = -e^{-t} \end{cases}$$

Quindi per il nostro integrale si avrà:

$$\int_0^\infty t^3 \cdot e^{-t} \cdot dt = [-t^3 \cdot e^{-t}]_0^\infty - \left(-3 \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt\right)$$

Ma il nuovo integrale

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt$$

abbiamo visto essere in precedenza pari a:

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt = [-t^2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t}]_0^\infty$$

per cui in definitiva avremo:

$$\int_0^\infty t^3 \cdot e^{-t} \cdot dt =$$

$$[-t^3 \cdot e^{-t}]_0^\infty + 3 \cdot [-t^2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t}]_0^\infty =$$
$$= [-t^3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot t^2 \cdot e^{-t} - 6 \cdot t \cdot e^{-t} - 6 \cdot e^{-t}]_0^\infty$$

Ora, per $t \to \infty$ si può vedere come ancora una volta tutti i termini vadano a zero, esattamente come era stato anche per i casi precedenti.

Per $t = 0$, invece, avremo semplicemente:

$$-t^3 \cdot e^{-t}|_{t=0} - 3 \cdot t^2 \cdot e^{-t}|_{t=0} - 6 \cdot t \cdot e^{-t}|_{t=0} - 6 \cdot e^{-t}|_{t=0} =$$
$$= 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 6$$

per cui in definitiva:

$$\boldsymbol{\Gamma(4)} = 0 - (-6) = \boldsymbol{6}$$

Senza ripetere i calcoli per valori di n superiori a 4 anticipiamo solo che, eseguendo le dovute operazioni, otterremmo:

$$\Gamma(5) = 24 \quad \Gamma(6) = 120 \quad \Gamma(7) = 720$$

e così via.

Ciò che si ottiene continuando a calcolare la funzione gamma per valori interi di n è quindi la seguente serie di risultati opportunamente raccolti nella seguente tabella:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$
1	1
2	1
3	2
4	6
5	24
6	120

7	720
…	…

Questa serie di valori è molto familiare: come si può infatti verificare, continuando ad impiegare interi n sempre maggiori, che la Funzione Gamma ci sta allora restituendo di fatto, come risultato, il fattoriale di $n-1$. In pratica, cioè, per la Funzione Gamma vale la regola:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

con n intero positivo.

Funzione Gamma per numeri frazionari

Quanto ottenuto finora appare quindi piuttosto interessante, visto che per come è stata definita la Funzione Gamma ci sta fornendo un metodo per determinare il fattoriale di un numero intero, anche se in maniera decisamente più complicata. Ma tale ragionamento va in realtà al di là di quella che può apparire come una banale curiosità matematica perché l'integrale che costituisce la Funzione Gamma consente a sua volta di ampliare ed estendere il ragionamento appena descritto anche ad altre classi o categorie di numeri diversi dagli interi reali positivi.

Vediamo ad esempio cosa succede se impieghiamo per n un numero frazionario. Scegliamo allo scopo il valore $n = 1/2$. Secondo tutto quanto visto in precedenza avremo allora la seguente Funzione Gamma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Per risolvere questo nuovo integrale è necessario procedere con un opportuno cambio di variabile. Poniamo ad esempio:

$$t = x^2$$

Differenziando allora si ha:

$$dt = 2 \cdot x \cdot dx$$

Inoltre, con questo cambio di variabile, potremo scrivere anche che

$$t^{\frac{1}{2}} = x$$

Quindi e^{-t} diventa:

$$e^{-t} = e^{-x^2}$$

e il precedente integrale della funzione gamma si può riscrivere come funzione di x così come segue:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} \cdot 2 \cdot x \cdot dx$$

Da cui:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

Per quanto analizzato nel precedente paragrafo, riconosciamo subito in questo integrale la forma dell'Integrale di Gauss. In particolar modo il calcolo tra i due precedenti estremi qui impiegati mostra però che il calcolo ci restituisce come risultato la metà del valore dell'Integrale di Gauss. Ricordiamo infatti l'Integrale di Gauss è della forma:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cdot dx$$

e la sua soluzione fornisce il valore di $\sqrt{\pi}$. Per cui per quanto riguarda invece gli estremi da 0 a ∞ avremo che il suo risultato non potrà che essere la metà, ovvero:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Per cui per questa Funzione Gamma di $n = 1/2$ avremo il seguente, notevole risultato:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Questo ragionamento è già di per sé quindi molto interessante perché mostra come si possa definire una Funzione Gamma anche per numeri frazionari. Ma soprattutto si tratta di una procedura che può essere anche generalizzata come vedremo adesso nel paragrafo seguente.

Funzione Gamma generalizzata

Per capire di preciso a cosa ci stiamo riferendo consideriamo il generico integrale descritto qui di seguito:

$$\int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot dt$$

dove si suppone $a > 0$ e $n > -1$.

Come si vede, così come è stato quando abbiamo introdotto in precedenza la Funzione Gamma all'inizio di questo paragrafo, anche in questo caso ci stiamo trovando a che fare col prodotto di due funzioni dentro un segno di integrale. Nella fattispecie la risoluzione di questa espressione necessita di un opportuno cambio di variabile, secondo la procedura che andiamo adesso ad illustrare di seguito.

Nello specifico l'integrale che stiamo adesso esaminando è costituito quindi dalle seguenti due funzioni moltiplicate tra di loro, ovvero:

$$t^n \qquad \text{e} \qquad e^{-a \cdot t^2}$$

Focalizziamo allora per prima cosa la nostra attenzione sul termine $a \cdot t^2$ ad esponente della seconda funzione, ed effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$$u = a \cdot t^2$$

In tal caso potremo scrivere perciò per la seconda funzione:

$$e^{-a \cdot t^2} = e^{-u}$$

Ma, dato che $u = a \cdot t^2$, allora da questo si ricava anche che

$$t = \sqrt{\frac{u}{a}}$$

per cui, passando ai differenziali, otterremo:

$$dt = d\left(\sqrt{\frac{u}{a}}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{u}{a}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a \cdot u}} \cdot du$$

Ma se, come detto

$$t = \sqrt{\frac{u}{a}}$$

allora di conseguenza

$$t^n = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Il nostro precedente integrale diventa quindi:

$$\int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a \cdot u}} \cdot du =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}} \cdot du =$$

$$= \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}} \cdot du =$$

$$= \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{n+1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}} \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-u} \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-u} \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-u} \cdot du$$

Se introduciamo adesso una nuova opportuna variabile, che chiameremo per esempio s, tale che sia:

$$s = \frac{n+1}{2}$$

allora avremo anche che:

$$s - 1 = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$$

per cui la precedente espressione dentro l'integrale assumerà la forma:

$$\int_0^{\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} \cdot du$$

Ma, per definizione, questa espressione corrisponde proprio alla definizione di Funzione Gamma! Scriveremo perciò che:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} \cdot du$$

Il che equivale a dire che

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-u} \cdot du$$

Avremo quindi in definitiva per il nostro integrale originario, la relazione seguente dove è evidenziata la dipendenza da una specifica Funzione Gamma:

$$\int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Questa è una formula importante, di validità generale ed utile per molti casi, come vedremo tra poco.

Relazione Ricorsiva della Funzione Gamma

Tenendo presente il risultato appena ottenuto analizziamo in dettaglio il comportamento della Funzione Gamma ammettendo che sia ad esempio $n = 2$ e $a = 1$. Il precedente integrale diventa allora semplicemente:

$$\int_0^\infty t^n \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot dt$$

la cui soluzione è immediatamente fornita dalla relazione:

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

Il precedente integrale si riduce quindi alla necessità di determinare la Funzione Gamma di $3/2$. Per far ciò torniamo nuovamente come prima cosa alla definizione che abbiamo dato all'inizio della Funzione Gamma:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Ecco, va da sé allora che tale espressione, prima di tutto, può equivalentemente riscriversi anche come:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Procediamo a questo punto ancora una volta ad una integrazione per parti ponendo stavolta:

$$u = t^n \Longrightarrow du = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$$
$$v = -e^{-t} \Longrightarrow dv = e^{-t} \cdot dt$$

Quindi, ricordando che:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

potremo scrivere

$$\Gamma(n+1) = [-t^n \cdot e^{-t}]_0^\infty - \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \cdot (-e^{-t}) \cdot dt =$$
$$= 0 + n \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Ma per come è stata definita la Funzione Gamma il termine dentro l'integrale è proprio pari a $\Gamma(n)$. Per cui con tale procedura abbiamo ricavato il risultato assolutamente notevole che:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$$

Questa così ottenuta è la cosiddetta <u>Relazione Ricorsiva</u> della Funzione Gamma, molto importante in quanto permette di calcolare il valore della funzione a partire da un valore precedente noto.

Ora, una volta nota la Relazione Ricorsiva, possiamo tornare nuovamente alla precedente funzione

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

e a questo punto possiamo quindi vedere come fare per determinare il valore di $\Gamma(3/2)$: cosa che in realtà diventa ora abbastanza facile tenendo appunto conto della Relazione Ricorsiva $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$. Nel nostro caso infatti è:

$$n + 1 = \frac{3}{2}$$

per cui

$$n = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Quindi di fatto

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ma ricordiamo che in precedenza avevamo trovato l'importante risultato:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

per cui in definitiva si ha:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e ciò ci consente alla seguente soluzione per il precedente integrale:

$$\int_0^\infty t^2\cdot e^{-t^2}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Fattoriale di frazioni

La formula ricorsiva è notevole. Ad esempio si ricava adesso immediatamente che:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\pi}$$

Tale procedura, perciò, estende di fatto il calcolo del fattoriale anche ai numeri frazionari! Avremo quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=3\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}=15\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{8}=105\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{16}$$

Ma non ci si deve limitare solo alle frazioni di 2. La Funzione Gamma, infatti, è ben definita per qualsiasi numero reale positivo incluse appunto tutte le frazioni (cioè i numeri razionali maggiori di zero), e persino per molti numeri non razionali. In particolare, per ogni frazione positiva

$$r=\frac{m}{n}$$

il valore $\Gamma(r)$ può essere calcolato applicando la Formula Ricorsiva:

$$\left(\frac{m}{n}-1\right)!=\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$$

Calcoliamo ad esempio il fattoriale di $1/3$. Ricordando che:

$$x!=\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$$

avremo quindi che:

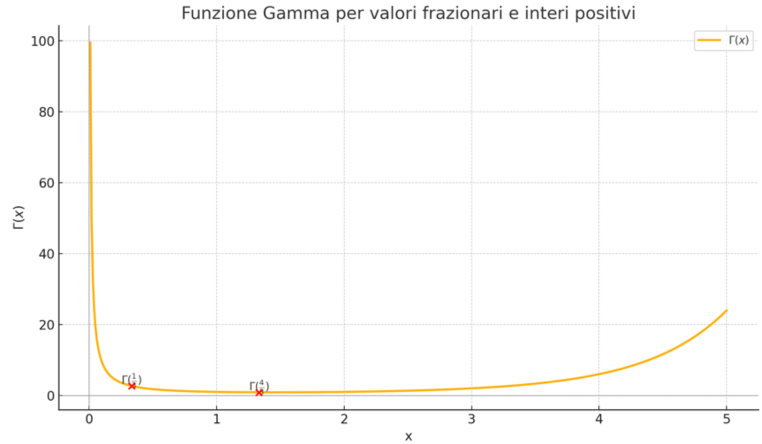
$$\left(\frac{1}{3}\right)!=\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

Il valore di $\Gamma(1/3)$, non si può esprimere con formule elementari, tuttavia è noto e tabulato valendo circa

2.678938 (omettiamo il calcolo, ottenibile tramite approssimazione numerica). Quindi in definitiva si avrà:

$$\left(\frac{1}{3}\right)! = \frac{1}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} \cdot 2.678938 \approx 0.89298$$

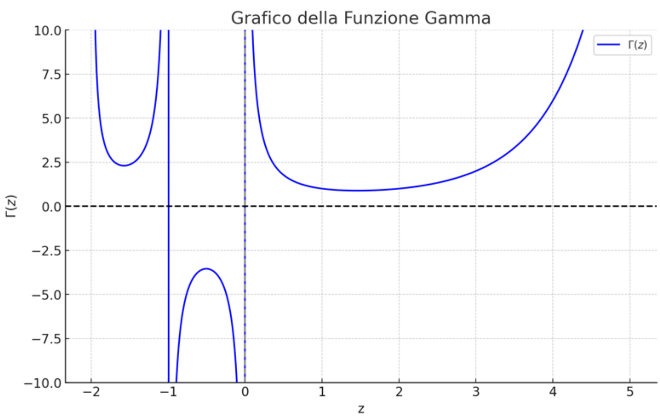
La figura seguente mostra il grafico della Funzione Gamma con evidenziati i due valori in $x = 1/3$ e $x = 4/3$.



Quindi la funzione Gamma può essere vista come un'estensione del concetto di fattoriale anche per numeri frazionari, e vale per tutti i numeri reali positivi (eccetto i negativi interi, dove invece diverge).

Dominio di esistenza della Funzione Gamma

Abbiamo visto quindi come la funzione Gamma cresca rapidamente per valori positivi ma ciò non toglie che non ossa essere definita anche per valori negativi. Tuttavia per valori interi negativi essa presenta dei poli (ovvero dei punti di discontinuità) per $z = 0, -1, -2, \ldots$ In tali punti interi negativi la funzione $\Gamma(z)$ diverge quindi all'infinito. Volendola rappresentare graficamente si ottiene una curva dal seguente andamento, dove la parte destra è formalmente analoga alla figura precedente:



A differenza di prima, adesso, in tale figura è quindi ben evidenziato anche il comportamento della funzione per valori negativi.

Funzione Gamma per numeri complessi

Finora ci siamo limitati ai numeri naturali e frazionari, ma nulla osta che si possa eseguire la stessa procedura estendendola anche ai numeri complessi. Cominciamo infatti col dire che, data stavolta una variabile complessa

z, la funzione Gamma è sempre definita nello stesso modo dal seguente, fondamentale, integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

La Funzione Gamma si estende quindi naturalmente anche al piano complesso per tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$, eccetto per i numeri interi non positivi che, come visto in precedenza, si comportano come dei poli semplici (cioè punti in cui la funzione diverge).

Anche per la funzione estesa sul piano complesso vale la Proprietà Ricorsiva, ovvero:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

Tale relazione permette quindi di "estendere" la funzione anche a sinistra nel piano complesso, a partire da valori con parte reale positiva.

Vediamo adesso un esempio: scegliamo una variabile complessa z definita così come segue:

$$z = 2.5 + i \cdot 1.5$$

Se sostituiamo tale variabile nell'integrale della Funzione Gamma avremo quindi:

$$\Gamma(2.5 + i \cdot 1.5) = \int_0^{\infty} t^{2.5+i\cdot 1.5-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^{\infty} t^{1.5+i\cdot 1.5} \cdot e^{-t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} t^{1.5} \cdot t^{i\cdot 1.5} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^{\infty} t^{1.5} \cdot e^{i\cdot 1.5\cdot \ln(t)} \cdot e^{-t} \cdot dt =$$

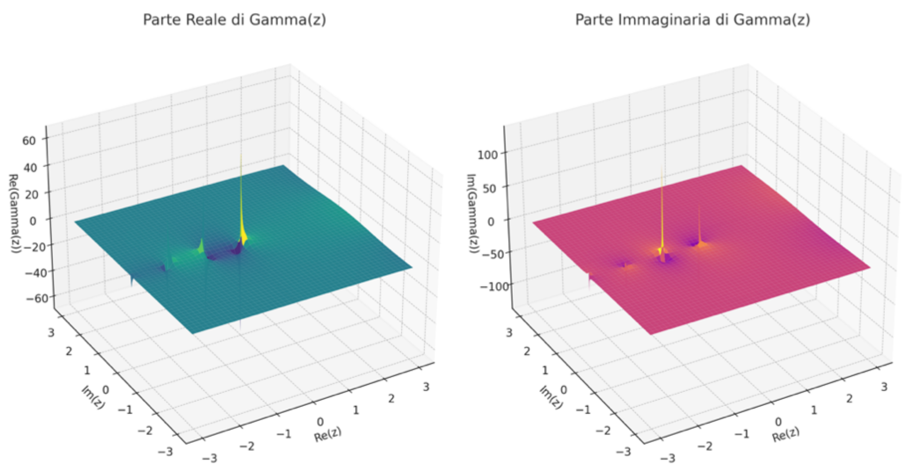
$$= \int_0^{\infty} t^{1.5} \cdot \left[\cos\left(1.5 \cdot ln(t)\right) + i \cdot \sin\left(1.5 \cdot ln(t)\right)\right] \cdot e^{-t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} t^{1.5} \cdot e^{-t} \cdot \cos\left(1.5 \cdot ln(t)\right) \cdot dt + i \cdot \int_0^{\infty} t^{1.5} \cdot e^{-t} \cdot \sin\left(1.5 \cdot ln(t)\right) \cdot dt$$

Come si vede siamo arrivati ad avere la somma di due integrali, uno costituente la parte reale e l'altro invece la parte immaginaria della funzione Gamma. Non è tuttavia semplice riuscire a risolvere questi integrali analiticamente (ambedue contengono infatti il prodotto di una potenza per un esponenziale, per una funzione trigonometrica contenente al suo interno un logaritmo), per cui per valutare ciascun integrale si ricorre tipicamente a metodi numerici. Tramite tali metodi numerici (che qui non illustriamo) la soluzione a cui si può giungere in questo caso sarebbe la seguente:

$$\Gamma(2.5 + i \cdot 1.5) \approx 0.31 + i \cdot 0.73$$

Rappresentare graficamente una funzione complessa come la funzione Gamma su numeri complessi richiede un approccio particolare, dato che le funzioni complesse hanno sia una parte reale che una parte immaginaria. Uno di questi è quello di rappresentare separatamente la parte reale e immaginaria come superfici 3D sopra il piano complesso, come schematicamente illustrato di seguito:



In questa rappresentazione il grafico a sinistra mostra la parte reale di $\Gamma(z)$ rispetto alla parte reale e alla parte immaginaria della variabile complessa z. Le variazioni della superficie indicano quindi come la parte reale della funzione cambia attraverso il piano complesso.

Il grafico a destra rappresenta invece la parte immaginaria di $\Gamma(z)$. Analogamente, questa superficie visualizza come la componente immaginaria della funzione Gamma si comporta in funzione dei valori complessi della variabile z.

Per concludere, perciò, ricordiamo che la funzione Gamma compare nelle soluzioni di molte equazioni differenziali utilizzate per descrivere fenomeni fisici, dimostrandosi altresì utile nella risoluzione di integrali complessi e nella somma di serie infinite. La sua definizione tramite un integrale e le sue proprietà la rendono di fatto uno strumento fondamentale nell'analisi matematica.