Funzione “peso”, e ortogonalità tra funzioni

Sia $w(x)$ una funzione definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Essa si dice Funzione Peso se soddisfa le seguenti quattro condizioni:

- Condizione di Non-Negatività: ovvero $w(x) \geq 0$ per tutti i valori di x nell’intervallo I. Questo significa che la funzione peso non può assumere valori negativi, al fine di garantire che ogni punto nell'intervallo contribuisca positivamente all'integrale.
- Condizione di Misurabilità: $w(x)$ deve essere una funzione misurabile, ovvero deve essere possibile definire integrali di funzioni sull’intervallo I, una condizione necessaria per le operazioni matematiche che coinvolgono $w(x)$.
- Condizione di Integrabilità Locale: $w(x)$ deve essere localmente integrabile su I. Formalmente, ciò significa che per ogni sottoinsieme compatto $K \subset I$, l'integrale $\int_K w(x) \cdot dx$ esiste (ed è finito). Questa condizione è cruciale per l'applicabilità della Funzione Peso in analisi matematica, come nelle formule di ortogonalità.
- Condizione di Normalizzabilità: in alcuni contesti, è anche richiesto che sia $\int_K w(x) \cdot dx = 1$, il che fa in questo caso di $w(x)$ una cosiddetta funzione di Densità di Probabilità, molto utile in fisica quantistica.

Il ruolo della Funzione Peso in contesti matematici come l'ortogonalità dei polinomi o altre forme di integrazione è fondamentale e specifico in quanto serve appunto a "pesare" alcune parti dell'intervallo di integrazione più di altre, influenzando significativamente sia il risultato dell'integrazione stessa che le proprietà delle funzioni o dei polinomi coinvolti. Il termine "Peso" si riferisce perciò, in pratica, alla capacità di questa funzione di dare più importanza (cioè più “peso”, appunto) a certi valori della variabile nell'integrale rispetto ad altri.

In definitiva, perciò, una funzione peso $w(x)$ modifica il contributo di ciascun punto x all'integrale complessivo:

$$\int_a^b f(x) \cdot w(x) \cdot dx$$

In questa espressione il ruolo di $w(x)$ è quindi quello di amplificare o attenuare il contributo del valore $f(x)$ all'integrale lungo l’intervallo $[a, b]$ in base proprio al valore che $w(x)$ assume in quel punto specifico. Se $w(x)$ è grande in un particolare intervallo, allora i valori di $f(x)$ in quell'intervallo hanno un maggiore impatto sull'integrale totale, e viceversa. Nello specifico potremo avere le seguenti quattro condizioni:

- Se $w(x) > 1$ allora il contributo di $f(x)$ in quel punto viene amplificato
- Se $w(x) < 1$ allora il contributo di $f(x)$ in quel punto viene attenuato
- Se $w(x) = 0$ allora il contributo di $f(x)$ in quel punto è ininfluente
- Se $w(x) < 0$ allora il contributo di $f(x)$ in quel punto viene invertito di segno

Come esempio potremmo immaginare che $f(x)$ sia la temperatura lungo una barra metallica mentre $w(x)$ potrebbe invece rappresentare la sensibilità del materiale a quella temperatura. In questo caso il precedente integrale rappresenta allora quella che viene chiamata con il termine di “Risposta Ponderata” del materiale lungo gli estremi $[a, b]$ della barra metallica.

Per maggiore chiarezza vediamo adesso un esempio pratico. Consideriamo la seguente funzione $f(x)$, costituita da una sinusoide rialzata che oscilla tra circa 0.5 e 2.5:

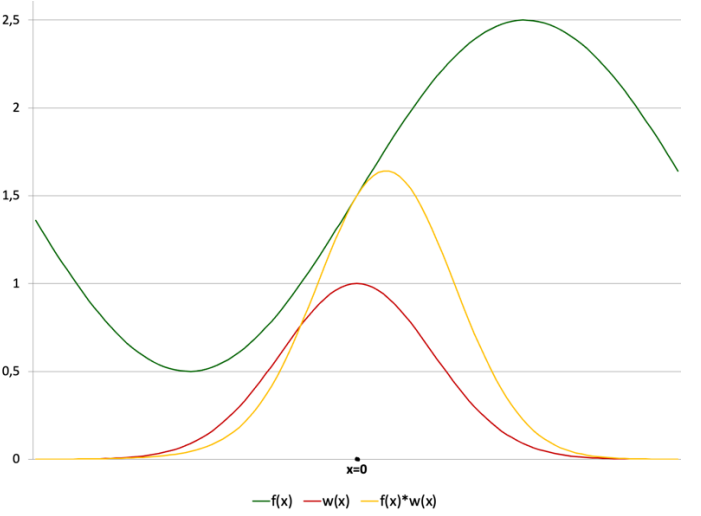
$$f(x) = \sin x + 1.5$$

Si consideri poi la seguente Funzione Peso $w(x)$, ovvero una curva gaussiana centrata in $x = 0$, e che vale circa 1 al centro andando poi a diminuire verso lo 0 man mano che ci si allontana da tale posizione:

$$w(x) = e^{-x^2}$$

In tal caso il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ delle due funzioni segue l’andamento di $f(x)$ per valori di x intorno allo 0 dove assume i valori massimi ma assume un andamento fortemente smorzato per valori di x lontani dallo 0.

La figura seguente illustra quanto appena descritto:



Una volta chiarito questo aspetto, si dice adesso che due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono Ortogonali su un intervallo $[a, b]$ se il loro prodotto scalare (definito tramite un integrale attraverso una opportuna funzione peso $w(x)$) è uguale a zero:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) \cdot dx = 0$$

In questo contesto, quindi, il compito della funzione peso $w(x)$ è quello di modulare il contributo che ciascun punto x da al precedente integrale, rendendo più rilevante alcune zone rispetto ad altre. Vediamo anche qui un esempio concreto.

Consideriamo le due seguenti funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ nell'intervallo $a = 0$ e $b = \pi$. Scegliamo come Funzione Peso la retta costante $w(x) = 1$ e vediamo se in tali condizioni $f(x)$ e $g(x)$ sono ortogonali. Per cominciare vediamo allora che il precedente prodotto scalare diventa:

$$\int_a^b sin(x) \cdot cos(x) \cdot 1 \cdot dx$$

Applichiamo allora adesso allo scopo l'identità trigonometrica:

$$sin(x) \cdot cos(x) = \frac{1}{2} \cdot sin(2 \cdot x)$$

Avremo quindi:

$$\int_a^b sin(x) \cdot cos(x) \cdot 1 \cdot dx = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot sin(2 \cdot x) \cdot dx = \left[-\frac{1}{4} \cdot \cos(2 \cdot x)\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot [\cos(2 \cdot x) - \cos(0)] = -\frac{1}{4} \cdot [1 - 1] = 0$$

Abbiamo quindi verificato che le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ da noi selezionate soddisfano la condizione di ortogonalità se scegliamo come Funzione Peso la retta $w(x) = 1$. Se scegliessimo invece un'altra Funzione Peso la condizione di ortogonalità potrebbe non essere più soddisfatta; ad esempio se avessimo $w(x) = x$ allora il precedente integrale diventa:

$$\int_a^b sin(x) \cdot cos(x) \cdot x \cdot dx \neq 0$$

ed in tal caso le due funzioni non sono più ortogonali rispetto alla nuova Funzione Peso.

La condizione di Ortogonalità tra funzioni è una delle idee più potenti e fondamentali sia in matematica applicata che in fisica. E, esattamente come in geometria bidimensionale dove due vettori possono essere ortogonali, se il loro prodotto scalare è zero, la stessa proprietà può valere anche tra due funzioni definite nel loro apposito spazio funzionale. Ad esempio in meccanica quantistica le funzioni d'onda degli stati quantistici sono ortogonali tra loro, il che significa che i due stati non interferiscono (cioè sono mutuamente esclusivi): concetto fondamentale, questo, per l'analisi della misurabilità, del collasso della funzione d'onda e per il principio di sovrapposizione. Tutti argomenti che analizzeremo più avanti nella seconda parte del corso. Qui aggiungiamo per completezza che anche in elettronica e telecomunicazioni l'ortogonalità (stavolta tra segnali elettrici) assume un ruolo importante, perché quando si verifica tale condizione essi non si disturbano a vicenda (assenza di interferenze); lo stesso, infine, nella soluzione di determinati problemi che riguardano le equazioni della trasmissione del calore o delle onde, dove si fa analogamente uso della condizione di ortogonalità.

E in tutti questi casi gioca la sua parte importante la Funzione Peso. Il suo ruolo è quindi quello di concentrare l'attenzione su specifiche aree di interesse dentro un ben determinato intervallo di integrazione, come quando si vogliono esaminare comportamenti asintotici o code di distribuzioni. In fisica, la Funzione Peso può riferirsi a condizioni fisiche reali, come ad esempio l'attenuazione di un segnale con la distanza, oppure variare secondo la densità di probabilità in contesti probabilistici; in matematica, invece, trova applicazione nell'ambito di funzioni polinomiali ortogonali dove svolge un ruolo essenziale per definire il tipo di ortogonalità, come vedremo anche nel successivo paragrafo con i polinomi di Laguerre. Per ricapitolare, quindi, si capisce come la Funzione Peso costituisca di fatto un meccanismo attraverso cui è possibile influenzare o controllare la distribuzione dell'importanza di una funzione lungo uno specifico intervallo di integrazione, modificando in modo opportuno l'interazione tra funzioni e migliorando l'adattabilità delle tecniche matematiche a problemi specifici.